§7.Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям вызван тем, что нет формулы, позволяющей находить интеграл от произведения функции.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$
$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$
$$uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du}$ - формула интегрирования по частям

Сущность метода: подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения 2-х множителей **u** и **dv**, затем пользуются правой частью формулы.

Как правильно выбрать **u** и **dv**:

	Вид интеграла	u	dv
I	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x)dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x)dx$
	$\int p(x) \cdot \mathrm{arctg} x dx$	$\mathrm{arctg} x$	$p(x)dx$

II	$\int p(x)\sin ax\cdot dx$ $\int p(x)\cos bx\cdot dx$ $\int p(x)\, e^{\alpha x}dx$	$p(x)$ $p(x)$ $p(x)$	$\sin ax\cdot dx$ $\cos bx\cdot dx$ $e^{\alpha x}dx$
III	$\int e^{\alpha x}\cdot\sin ax\cdot dx$ $\int e^{\alpha x}\cdot\cos bx\cdot dx$ $\int\sin(\ln x)dx$	$e^{\alpha x}$ $\sin ax$ $e^{\alpha x}$ $\cos bx$ $\sin(\ln x)$	$\sin axdx$ $e^{\alpha x}dx$ $\cos bxdx$ $e^{\alpha x}dx$ dx

$P(x)$ - многочлен или одночлен.

Замечание:

Интегралы III группы берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Пример.

1)

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u & \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv & x = v \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$$

$$= \underline{x \cdot \ln x - x + C = x\left(\ln x - 1\right) + C}$$

2)

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} x^2 = u & \cos x dx = dv \\ 2x dx = du & \sin x = v \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \sin x - 2\left(-x \cdot \cos x - \int \left(-\cos x\right) dx\right) = \_$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C$$

3)

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \left| \begin{matrix} e^x = u & \sin x dx = dv \\ e^x dx = du & -\cos x = v \end{matrix} \right| = -e^x \cos x - \int (-\cos x) \cdot e^x dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} e^x = u & \cos x dx = dv \\ e^x dx = du & \sin x = v \end{matrix} \right| =$$

$$-e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx;$$

$$2\int e^{x}\cdot \sin x dx=e^{x}\left(\sin x-\cos x\right)$$

$$\int e^{x}\cdot \sin x dx=\frac{e^{x}}{2}\left(\sin x-\cos x\right)+C$$

§8.Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Определение 1. ***Рациональной функцией*** **называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе называются *рациональными дробями*.**

$$R\left(x\right)=\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$$

Пример. $R_1\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x+7}{x^4+9x^3+8}$ $\quad R_2\left(x\right)=\dfrac{x^2+9}{x-1}$ $\quad R_3\left(x\right)=\dfrac{3x^2+5x+8}{x^2+2x-3}$

Определение 2. **Рациональная дробь называется *правильной,* если степень числителя меньше степени знаменателя.**

$R_1(x)$ - **правильная рациональная дробь.**

Определение 3. **Рациональная дробь называется *неправильной,* если степень числителя больше или равна степени знаменателя.**

$R_2(x)$, $R_3(x)$ - неправильные рациональные дроби.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

Теорема. **Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.**

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}}$$

Пример.

$$\frac{x^3+3x^2+x-1}{x-1} = x^2+4x+5+\frac{4}{x-1}$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+x-1 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+4x+5} \\
\quad -\,4x^2+x-1 & \\
\quad\;\; \underline{4x^2-4x} & \\
\qquad\quad -\,5x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{5x-5} & \\
\qquad\qquad\quad 4 &
\end{array}
$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует 3 типа элементарных дробей:

1. $\dfrac{A}{x-a}$ - I тип
2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ - II тип
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ - III тип

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

1) Если знаменатель содержит различные линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

A=? B=? C=?

2) Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}=$$

$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\frac{C_3}{(x-c)^3};$$

$A-?\quad B_1-?\quad B_2-?$

$C_1-?\quad C_2-?\quad C_3-?$

3) Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}=$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Cx+Д}{x^2+p_2x+q_2}$$

§9.Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

1) I типа:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$$

2) II типа

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

3) III типа (Д < 0)

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=A\int\frac{x}{x^2+px+q}dx+B\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2}A\int\frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q}dx+$$

$$+B\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=\frac{1}{2}A\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}A\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

§10. Методы нахождения значений A, B, C…

§10.1 Метод неопределенных коэффициентов

Состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной х.

Простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной функции. Получится система «n» уравнений с «n» неизвестными А, В, С…, которая имеет единственное решение.

Пример. $$\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx =$$

Подынтегральную функцию представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{\overset{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{\overline{A}}}{x-1} + \frac{\overset{\left(x^2+2x+2\right)}{\overline{B}}}{(x-1)^2} + \frac{\overset{(x-1)^2}{\overline{Cx+Д}}}{x^2+2x+2}$$

$$x^2-5x+9 = A\left(x^3-x^2+2x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+$$

$$+(Cx+Д)\left(x^2-2x+1\right) = \underline{Ax^3}+\underleftrightarrow{Ax^2}-2A+\underleftrightarrow{Bx^2}+\underline{\underline{2Bx}}+2B+\underline{Cx^3}-$$

$$\underleftrightarrow{2Cx^2}+\underline{\underline{Cx}}+\underleftrightarrow{Дx^2}-\underline{\underline{2Дx}}+Д = x^3(A+C)+x^2(A+B-2C+Д)+$$

$$x(2B+C-2Д)+(-2A+2B+Д)$$

$$\begin{array}{c|c} x^3 & \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array} \qquad \begin{cases} 0 = A+C \\ 1 = A+B-2C+Д \\ -5 = 2B+C-2Д \\ 9 = -2A+2B+Д \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$A=-\frac{7}{5} \qquad B=1 \qquad Д=\frac{21}{5} \qquad C=\frac{7}{5}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=\int \frac{-\frac{7}{5}}{x-1}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx+\int \frac{\frac{7}{5}x+\frac{21}{5}}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{5}\int \frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)}+\frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+2}dx+\frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\frac{7}{5}\int \frac{dx}{(x+2x+1)-1+2}+\frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$\underline{=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x-1)+C}$$

§10.2 Метод частных значений.

Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида $(x-a)(x-b)(x-c)$, то можно применять метод частных значений для нахождения коэффициентов A, B, C…, придавая x значения $x=a;\ x=b;\ x=c$

Пример.

$$\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$$

$$2x^2+10x-18=A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+$$
$$+C(x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{r|lc} x=1 & -6=A\cdot 3(-2) & A=1 \\ & & \\ x=-2 & -30=B(-3)(-5) & B=-2 \\ & & \\ x=3 & 30=C\cdot 2\cdot 5 & C=3 \end{array}$$

Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Выводы: Если под знаком интеграла стоит рациональная дробь, то:

1. Если подынтегральное выражение - неправильная рациональная дробь, то ее надо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей, для чего определить значения коэффициентов A, B, C…
3. Подынтегральное выражение представить в виде суммы легко интегрируемых функций.